III. FEJEZET

A konjunkcióról és a diszjunkcióról egyaránt elmondható: a kijelentés igazságán mit sem változtat, ha az első és a második felét megcseréljük.

Egyre megy:
#3.1
(a) Bogáncs májat reggelizik vagy csontot.
(b) Bogáncs csontot reggelizik vagy májat.

A két kijelentés igazságtáblázata megegyezik, logikailag ekvivalensek.

Ugyanez a helyzet a következő két kijelentéssel is.
#3.2
(a) Bogáncs ugat és szaladgál.
(b) Bogáncs szaladgál és ugat.

Más szóval: a konjunkció és a diszjunkció **kommutatív**. A & B, B & A ekvivalens. Valamint $A \vee B$, $B \vee A$ is az

Kommutatív például az összeadás és a szorzás is: tagjai felcserélhetőek. Azonban a kivonás nem kommutatív: nem mindegy: hogy 1000 – 5 forint van a bankszámlámon, vagy 5 – 1000.

A soron következő konnektívum, a „ha … akkor …”-ra bevezetésre kerülő ‘$\supset$’ szintén **nem kommutatív**. A két állítás között komoly különbség van:

#3.3
(a) Ha Ernő elmegy kirándulni, akkor elered az eső.
(b) Ha elered az eső, Ernő elmegy kirándulni.

Az első kijelentés szerint Ernő peches (az időjárás keresztülhúzza a kirándulási terveit); a második igen sajátos kirándulási szokásokra világít rá (ki akarna direkt esőben kirándulni?).
Itt is különbség van:
#3.4
(a) Ha a pénzügyminiszter lemond, az ellenzéknek vidám kedve kerekedik.
(b) Ha az ellenzéknek vidám kedve kerekedik, akkor a pénzügyminiszter lemond.

A 3.3 és a 3.4 mondatpárban is az a helyzet, hogy (a) és (b) *feltételes kijelentések*, de ami (a)-ban feltétel (**előtag**), az (b)-ben éppen az rész, amit feltételesen jelentünk ki (**utótag**) és fordítva. (a) és (b) egymás *megfordításának* tekinthető, de a példa már önmagában bizonyítja, hogy a feltételes kijelentések *nem fordíthatók meg* (abban az értelemben, hogy nem ekvivalensek a megfordításukkal).

Mit is állítunk azzal, hogy

„Ha Ernő elmegy kirándulni, akkor elered az eső”?

Az hogy Ernő kirándulni indul, máris elég ahhoz, hogy az eső eleredjen.
Vagyis: A kirándulás kezdeményezése Ernő részéről **elégséges** ahhoz, az eső eleredjen.
Más szóval: amellett kötelezzük el magunkat, hogy
nem fordulhat elő, hogy Ernő kirándul és az eső nem esik (Ernő ilyen peches).

p: Ernő kirándulni indul.
q: Elered az eső.
$p \supset q$:
p elégséges feltétele annak, hogy *q*.
p igazsága mellett *q* is igaz.
Nem fordulhat elő, hogy *p* és ~ *q* egyszerre igaz.

Ebből máris kirajzolódik a kondicionális igazságtáblázatának egy része:

KONDICIONÁLIS

	A	*B*	*A & B*
	igaz	igaz	igaz
$\supset$	igaz	hamis	hamis
	hamis	igaz	?
	hamis	hamis	?

A kérdés, hogy miként alakul a kondicionális igazságértéke abban az esetben, ha a kijelentés első fele hamis, vagyis Ernő nem megy kirándulni?

Nos, a kijelentés csak amellett kötelezi el a kimondóját, hogy amennyiben Ernő kirándul, elered az eső. Ezzel semmilyen elkötelezettséget nem vállalt arra az esetre, ha Ernő például otthon marad. Így az ilyen esetben a kondicionális semmiképp sem hamis. A kétértékűség alapján (az előző fejezetben) azonban egyetlen választásunk marad akkor: a kondicionális igaz.

KONDICIONÁLIS

	A	*B*	*A & B*
	igaz	igaz	igaz
$\supset$	igaz	hamis	hamis
	hamis	igaz	igaz
	hamis	hamis	igaz

Akárcsak korábban, most is alkalmazhatjuk a kondicionális igazságtáblázatát összetett kijelentésekre is:

Ha Ernő kirándulni indul, elered az eső, vagy feltámad a szél.
$p \supset (q \vee r)$

Ahhoz, hogy számba vehessük az összes lehetőségét arra, hogy *p*, *q*, *r* igazságértékei hogyan alakulnak, már nyolc-soros igazságtáblázatra van szükségünk.

Általában: *a sorok számát (k) az határozza meg, hogy a felírandó kijelentés (vagy kijelentések) hány atomi kijelentést (n) tartalmaznak.*

$\underline{k = 2^n}$

Kijelentésünk táblázata tehát a következőképpen alakul:

p	q	r	$q \vee r$	$p \supset (q \vee r)$
igaz	igaz	igaz	igaz	igaz
igaz	igaz	hamis	igaz	igaz
igaz	hamis	igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis	hamis	hamis
hamis	igaz	igaz	igaz	igaz
hamis	igaz	hamis	igaz	igaz
hamis	hamis	igaz	igaz	igaz
hamis	hamis	hamis	hamis	igaz

Azaz a kijelentés egyetlen esetben hamis: ha *p* igaz, de *q* is, *r* is hamis.

Mit kezdjünk ezzel a kijelentéssel?

#3.5
Bori csak akkor kirándul, ha szép idő van.

q: Bori kirándul.
p: Szép idő van.
Csak akkor *q,* ha *p.*
A „csak akkor"-ra nincsen külön logikai szavunk, viszont megragadhatjuk az eddig bevezetett konnektívumok segítségével. Hogyan?

#3.5 azt állítja:
Ahhoz, hogy Bori kiránduljon, **szükséges,** hogy az idő szép legyen.
Ha nincs szép idő, Bori nem kirándul.
Vagyis: $\sim p \supset \sim q$

Másképpen is megfogalmazhatjuk:
Ha Bori kirándul, akkor biztos, hogy szép az idő.
Vagyis: $q \supset p$

Összegezve:
Csak akkor *q,* ha *p.*
p szükséges feltétele annak, hogy *q*
$\sim p \supset \sim q$; avagy más alakban:
$q \supset p$

Vegyük észre: #3.5 (Bori csak akkor kirándul, ha szép idő van) ugyanazt állítja, mint a következők:
Ha nincs szép idő, Bori nem kirándul.
Bori nem kirándul, hacsak nincs szép idő.

Általában: a „ha… akkor …” állítások elégséges feltételt határoznak, meg, a „… csak akkor, ha …” állítások pedig szükséges feltételt.

Az imént láthattuk, hogy
$\sim p \supset \sim q$
$q \supset p$
egyaránt fordítása #3.5-nek, vagyis a két kijelentés logikailag ekvivalens. Igazságtáblázat felrajzolásával meg is győződhetünk erről:

p	q	$\boldsymbol{p \supset q}$	$\sim p$	$\sim q$	$\boldsymbol{\sim q \supset \sim p}$
igaz	igaz	**Igaz**	hamis	hamis	**igaz**
igaz	hamis	**hamis**	hamis	igaz	**hamis**
hamis	igaz	**Igaz**	igaz	igaz	**igaz**
hamis	hamis	**Igaz**	igaz	igaz	**igaz**

Egy $A \supset B$ feltételes kijelentés **kontraponált**ján a $\sim B \supset \sim A$ kijelentést értjük.A
A **kontrapozíció** szabálya azt mondja ki, hogy minden feltételes kijelentés ekvivalens a kontraponáltjával, azaz

$A \supset B$ logikailag ekvivalens $\sim B \supset \sim A$-val.

(Erre példát is láttunk már: #3.5 ('Bori csak akkor kirándul, ha szép az idő' kétféleképpen is átfogalmazható: 'Ha nincs szép idő, Bori nem kirándul', vagy 'Ha Bori kirándul, akkor szép az idő.)

A **kettős negáció szabályá**t könnyedén beláthatjuk (igazságtáblázat alapján):

A és $\sim\sim A$ logikailag ekvivalens.

Vagyis: a két kijelentés bármelyikéből következik a másik.

Vezessünk be még egy hasznos fogalmat: Egy kijelentés **főkonnektívuma** az a konnektívum, amit a kijelentés összerakásakor utoljára alkalmazunk (ennek megfelelően a kijelentés igazságtáblázatának utolsó poszlopában számolunk vele).

A kettős negáció és a kontrapozíció szabályából együttesen következik az alábbi két ekvivalencia:

$\sim A \supset B$ ekvivalens $\sim B \supset A$-val;
$A \supset \sim B$ ekvivalens $B \supset \sim A$-val.

Hogy belássuk, ezek tényleg ekvivalens állítások, vegyünk egy példát:
Elemér minden este otthon olvasgat, kivéve minden hónap első szerdáját, amikor pókerezni jár. Akkor igaz rá a következő:

#3.6
Elemér otthon tölti az estét, hacsak nincs szerda.
p: Szerda van.
q: Elemér otthon tölti az estét.

Ezt kétféleképpen is megfogalmazhatjuk:
Ha nem szerda van, Elemér otthon tölti az estét. $\sim p \supset q$
(Hiszen a póker-szerdát leszámítva a hónap minden napján otthon marad)
Ha Elemér nem tölti otthon az estét, akkor szerda van. $\sim q \supset p$
(Ha nincs otthon, akkor aznap kell lennie annak a bizonyos póker-szerdának)

Igazságtáblázattal be is bizonyíthatjuk (a kontrapozíció esetéhez hasonlóan) hogy a két állítás ekvivalens.

Fontos szem előtt tartanunk, hogy #3.6 NEM állítja a következők egyikét sem:
Ha szerda van, Elemér nem tölti otthon az estét.
(Hiszen lehet, hogy épp nincs póker-szerda, és akkor viszont otthon lesz.)
Ha Elemér otthon tölti az estét, akkor nem szerda van.
(Ismét felmerül a lehetőség, hogy Elemér egy szerdai, nem-pókeres estét tölt otthon.)

Ez rendjén is van, hiszen az eddigi kondicionálisoknál az előtag csak elégséges feltételt állított, szükséges feltételt nem. És az eddig látott magyar mondatoknál („…hacsak…”, „ha… akkor …”, „…csak akkor ha…”) egyik esetben sem merült fel, hogy egyaránt állítottak volna szükséges és elégséges feltételeket. A **bikondicionális** ellenben pontosan ezt teszi. Bevezethetünk rá egy konnektívumot is: **≡ . A bikondicionális pontosan akkor igaz, ha az elő- és utótagjának az igazságértéke megegyezik:**

BIKONDICIONÁLIS

	A	B	$A \equiv B$
≡	igaz	igaz	igaz
	igaz	hamis	hamis
	hamis	igaz	hamis
	hamis	hamis	igaz

#3.7
Bogáncs akkor és csak akkor ugat, ha macskát lát.
p: Bogáncs ugat.
q: Bogáncs macskát lát.

Ezt lefordíthatjuk bikondicionálissal:
$p \equiv q$

és más konnektívumok segítségével:

$(p \supset q)$ & $(q \supset p)$

(A két állítás ekvivalens, ezt igazságtáblázattal ellenőrizheti is az olvasó.)

Fontos észben tartanunk, hogy *a magyar nyelvben előforduló feltételes mondatok nem állítanak elégséges és szükséges feltételeket*, tehát nem fordíthatóak le bikondicionálisként. Sokszor előfordul, hogy a szükséges feltételt is sugallja egy kijelentés:

#3.7
Ha Kati leviszi a szemetet, akkor kap csokit.

Meglepően hat, ha ennek fényében kiderül: Kati a kisujját sem mozdította, sőt, még a játékait is szanaszét hagyta, és mégis kapott csokit. De érdemes visszaemlékeznünk: az, hogy egy állítás furcsa, nem jelenti azt, hogy hamis. A furcsaság forrása itt az, hogy #3.7 alapján azt várjuk: az utótag igazsága szempontjából *számít, releváns,* hogy az előtag igaz-e, vagy sem. Mi értelme #3.7-et kimondani, ha Kati kap csokit, bármit is tesz? Ilyen helyzetben tényleg fura kondicionális kijelentést tenni (ahelyett, hogy egyszerűen azt mondaná az illető: „Kati kap csokit. Pont.”). De ettől még a kondicionális nem hamis. A kétértékűség miatt pedig a fennmaradó alternatíva az, hogy igaz.

Egy másik megfontolás útján is beláthatjuk, hogy *#3.7 nem állít szükséges feltételt*, vagyis nem állítja: ahhoz hogy Kati csokit kapjon, szükséges, hogy levigye a szemetet.

Nincs ellentmondás a két állítás közt:

Ha Kati leviszi a szemetet, akkor kap csokit.
Ha Kati bevásárol, akkor kap csokit.

A két állítás lehet egyszerre igaz: például egy olyan szituációban, amikor Kati a szeméthez hozzá sem nyúl, viszont bevásárol, és csokiban részesül. A szituációból máris látható: a csokiban részesüléshez nem *szükséges* a szemétlevitel.

Egy ritka eset, amikor egyaránt állítunk elégséges és szükséges feltételt:
Bogáncs ugat, de csak akkor, ha macskát lát.

* * * * *

Eddig egyes kijelentések igazságtáblázatát írtuk fel. A táblázat azt ragadta meg, hogy az *atomi kijelentések igazságértékének függvényében az összetett kijelentés igazságértéke hogyan alakul.*

Ezzel megvannak az alapjai annak, hogy következtetések helyességének és helytelenségének kimutatására is alkalmazhassunk igazságtáblázatokat.

Az átláthatóbb jelölés kedvéért bevezetünk két további jelölési konvenciót:
Ha **A és B ekvivalensek**, akkor azt jelölhetjük így: <u>A ⇔ B</u>
Ha **A-ból következik B**: <u>A ⇒ B</u>.

Emlékezzünk vissza az első fejezet **helyesség**-definíciójára:
<u>A premisszák igazsága mellett a konklúzió nem lehet hamis.</u>

Amennyiben egyetlen igazságtáblázatban írjuk fel az összes premisszát és konklúziót, máris egy egészen konkrét helyesség-definíciót adhatunk:

Egy következtetés **helyes** pontosan akkor, ha
<u>Az összes olyan sorban, amelyben a premisszák mind igazak, a konklúzió is igaz.</u>

Más szóval: <u>nincs olyan sora az igazságtáblázatnak, amelyben a premisszák mind igazak, a konklúzió viszont hamis.</u>
Amennyiben mégis ilyen sorra bukkanunk, máris elegendő bizonyítékunk van arra, hogy a következtetés helytelen. Ezen a ponton az ellenőrzést be is fejezhetjük. Ha van ilyen árulkodó sor, azt hívjuk **ellenpéldá**nak. *Az ellenpéldá(ka)t jelöljük X-szel.*

Vagyis a helytelenség bizonyításához legalább egy ellenpéldát kell találnunk.

Az első fejezetben felvetődött ez a következtetés:

#3.8
1. premissza: Ha Marci jön a keddi filmre, akkor Robi nem jön a keddi filmre.
2. premissza: Robi nem jön a keddi filmre.
Konklúzió: Marci jön a keddi filmre. [lásd alább]

p: Marci jön a keddi filmre.
q: Robi jön a keddi filmre.
Fordítás: $p \supset \sim q$,
$\sim q$
$\underline{\Rightarrow p}$
rövidebben: $p \supset \sim q, \sim q \underline{\Rightarrow p}$

Most már be is tudjuk bizonyítani, hogy ez a következtetés helytelen:

P	*q*	$p \supset \sim q$	$\sim q$	p
Igaz	igaz	hamis	Hamis	igaz
Igaz	hamis	igaz	Igaz	Igaz X
Hamis	igaz	igaz	Hamis	Hamis
Hamis	hamis	igaz	Igaz	hamis

Magyarázat:
--Két sor van, amelyben mindkét premissza igaz: a 2. és a 4.
--A 2-ban a konklúzió is igaz, így nem kapunk ellenpéldát.
--A 4. viszont ellenpélda: a konklúzió hamis.
--Tehát találtunk egy ellenpéldát, ezt be is jelöljük X-szel.
--Ergo: A következtetés hamis (X alapján).

A helyesség bizonyításához viszont azt kell megmutatnunk, hogy nem létezik ellenpélda. Vagyis *az igazságtáblázat összes sorát kimerítően ellenőriznünk kell*. Ezért is fontos, hogy biztosak legyünk benne: az összes igazságérték-kombinációt lefedtük a táblázat felírásakor (elég sort vettünk fel, megfelelően variáltuk az egyes atomi kijelentések igazságértékeit).

Vegyünk egy már ismerős egyszerű példát:
#3.9
1. premissza: Ha skandináv filmet vetítenek, Marcsi eljön.
2. premissza: Skandináv filmet vetítenek.
Konklúzió: Marcsi eljön.)

p: Skandináv filmet vetítenek.
q: Marcsi eljön.
Fordítás: $p \supset q$,
p
$\underline{\Rightarrow q}$
rövidebben: $p \supset q$, p $\underline{\Rightarrow q}$

p	*q*	*p ⊃ q*	*p*	q
Igaz	igaz	Igaz	Igaz	igaz
Igaz	hamis	hamis	Igaz	hamis
Hamis	igaz	igaz	Hamis	igaz
Hamis	hamis	igaz	Hamis	hamis

Magyarázat:
--Ha egyenként végignézzük a táblázat sorait, azt látjuk, hogy kizárólag egy sor van, ahol mindkét premissza igaz: az 1. sor.
--Ott viszont a konklúzió is igaz, így 1. nem ellenpélda.
--Mivel nem találtunk ellenpéldát, így bebizonyítottuk, hogy a következtetés helyes.

<u>A ⊃ B, A ⇒ B – ezt a következtetési sémát hívjuk **modus ponens**nek.</u>

Ezzel a sémával is találkoztunk már:
#3.10
1. premissza: ha *A*, akkor *B*
2. premissza: nem *B*
Konklúzió: nem *A*

Pl.
1. premissza: Ha elfogadjuk a kiválasztási axiómát, akkor egyszersmind azt is elfogadjuk, hogy bármely gömb átdarabolható két, vele megegyező térfogatú gömbbé.
2. premissza: Nem fogadjuk el, hogy bármely gömb átdarabolható két, vele megegyező térfogatú gömbbé.
Konklúzió: Nem fogadjuk el a kiválasztási axiómát sem.

p: Elfogadjuk a kiválasztási axiómát
q: Bármely gömb átdarabolható két, vele megegyező térfogatú gömbbé.

Fordítás:
p ⊃ q
~ q
<u>⇒ ~p</u>

Rövidebben: p ⊃ q, ~ q <u>⇒ ~p</u>

Az <u>„A ⊃ B, ~ B ⇒ ~ A" sémát hívjuk</u> **modus tollens**nek. Korábban jeleztük már: a séma helyes, de helyessége egyáltalán nem nyilvánvaló. Viszont az első premissza kontraponáltjával máris egy modus ponensre épülő következtetéssé alakítottuk át #3.9-et:
p ⊃ q <u>⇔</u> ~ q ⊃ ~ p (kontrapozíció) alapján:

~ q ⊃ ~ p
~ q
<u>⇒ ~p</u>

Vagyis: ~ q ⊃ ~ p, ~ q <u>⇒ ~p</u>

Tehát bármely modus tollens révén elért konklúzió elérhető alternatív módon, két lépésben: kontrapozíció + modus ponens.

Igazságtáblázat segítségével függetlenül is kimutathatjuk, hogy modus tollens helyes:

p	*q*	*p ⊃ q*	*~ q*	*~ p*
Igaz	igaz	Igaz	hamis	Hamis
Igaz	hamis	hamis	igaz	Hamis
Hamis	igaz	igaz	hamis	Igaz
Hamis	hamis	igaz	igaz	Igaz

Magyarázat:
--Ha egyenként végignézzük a táblázat sorait, azt látjuk, hogy kizárólag egy sor van, ahol mindkét premissza igaz: az 4. sor.
--Ott viszont a konklúzió is igaz, így 4. nem ellenpélda.
--Mivel nem találtunk ellenpéldát, így bebizonyítottuk, hogy a következtetés helyes.

Mi következik abból, ha a premisszák nem lehetnek együttesen igazak?

Például:
#3.11
~ (p ⊃ *q*)
~p
<u>⇒ *r*</u>

<u>Vagyis: </u>~ (p ⊃ *q*), ~p <u>⇒ *r*</u>

Magyarázat: Az igazságtáblázatnak nincs olyan sora, ahol mindegyik premissza igaz – ez önmagában kizárja azt, hogy ellenpéldát találjunk.

* * * * *

A legtöbb kijelentés igazságértéke változik az atomi kijelentések igazságértékének függvényében. Előfordulnak azonban olyan esetek is, amikor *bárhogyan is alakulnak az atomi kijelentések igazságértékei, a kijelentés hamis.* *Ezeket a kijelentéseket hívjuk* ***ellentmondás****nak.* A másik eset: *bárhogyan is alakulnak az atomi kijelentések igazságértékei, a kijelentés igaz.* *Ezeket a kijelentéseket hívjuk* **logikai igazság***nak.*

Példák:
#3.12
(p ⊃ q) ∨ (~ p ⊃ ~ q) – logikai igazság a táblázat alapján:

p	*q*	*p ⊃ q*	*~ p ⊃ ~ q*	(p ⊃ q) ∨ (~ p ⊃ ~ q) ~*p*
igaz	igaz	igaz	igaz	igaz
igaz	hamis	hamis	igaz	igaz
hamis	igaz	igaz	hamis	igaz
hamis	hamis	igaz	Igaz	igaz

#3.13
((p ⊃ q) ∨ ~ r) ≡ ((p & ~ q)& r) – ellentmondás a táblázat alapján:

p	*q*	*r*	p ⊃ q	((p ⊃ q) ∨ ~ r)	*p & ~ q*	((p & ~ q)& r)	(p ⊃ q) ≡ ((p & ~ q)& r)
igaz	igaz	igaz	igaz	igaz	hamis	hamis	**hamis**
igaz	igaz	hamis	igaz	igaz	hamis	hamis	**hamis**
igaz	hamis	igaz	hamis	hamis	igaz	igaz	**hamis**
igaz	hamis	hamis	hamis	igaz	igaz	hamis	**hamis**
hamis	igaz	igaz	igaz	igaz	hamis	hamis	**hamis**
hamis	igaz	hamis	igaz	igaz	hamis	hamis	**hamis**
hamis	hamis	igaz	igaz	igaz	hamis	hamis	**hamis**
hamis	hamis	hamis	igaz	igaz	hamis	hamis	**hamis**

(Az utolsó oszlop az 5. és 7. alapján, a bikondicionális igazságtáblázatával.)

Léteznek jóval egyszerűbb példák is:
Ellentmondás: *p & ~ p*
Logikai igazság: *p ∨ ~ p*

Korábban említettük már a kizáró diszjunkciót, amelyet kifejezhetünk így:
(p ∨ q) & ~ (p & q)
Ez pontosan akkor igaz, amikor hamis a bikondicionális:
p ≡ *q*
Tehát ellentmondás a következő: ((p ∨ q) & ~ (p & q)) ≡ (*p* ≡ *q*)

(Igazságtáblázattal bizonyíthatjuk is, hogy így van.)

A helyesség fenti definíciójából következik:
Ha a premisszák egyike ellentmondás, a következtetés helyes.
Például:
#3.14
$p \mathbin{\&} \sim p \;\underline{\Rightarrow q}$

Magyarázat:
A premissza az igazságtáblázat minden sorában hamis, ez önmagában kizárja azt, hogy ellenpéldát találjunk.

Ha a konklúzió logikai igazság, a következtetés helyes.
Például:
#3.15
$p, q \;\underline{\Rightarrow r} \vee \sim r$

Magyarázat:
A konklúzió igazságtáblázat minden sorában igaz, ez önmagában kizárja azt, hogy ellenpéldát találjunk.