IV. fejezet

Analitikus táblázatok a kijelentéslogikában

4.0 Bevezetés

A következtetések helyességének indirekt ellenőrzésekor a következőképpen jártunk el:

(1) feltételeztük, hogy a konklúzió hamis, a premisszák pedig igazak;

(2) a kijelentések logikai szerkezetét egészen az atomi kijelentésekig visszakövetve megvizsgáltuk, milyen következményekkel jár feltevésünk a premisszákat és a konklúziót alkotó atomi kijelentések igazságértékére nézve;

(3) megvizsgáltuk, hogy az atomi kijelentések igazságértékével szembeni elvárásainkban felbukkant-e ellentmondás. Ha igen, akkor a következtetés helyesnek minősült; ha nem, akkor helytelennek.

Ennek az eljárásnak a során tehát a premisszákból és a konklúzió tagadásából álló formulahalmaz rejtett ellentmondását igyekeztünk explicitté tenni. Ehhez mindenekelőtt hipotetikusan igazságértéket tulajdonítottunk a premisszáknak és a konklúziónak. Erre a lépésre azonban voltaképpen nincs szükség.

A rejtett ellentmondást anélkül is feltárhatjuk, hogy hivatkoznunk kellene a formulák igazságértékére; elég, ha megvizsgáljuk, mit tudunk meg a premisszákból és a konklúzió tagadásából. A rejtett ellentmondás akkor válik explicitté, ha a megtudott kijelentések között felbukkan egy formula és annak negációja. A helyesség ellenőrzésének módszerét így a következőképpen módosíthatjuk:

(1) a kijelentések logikai szerkezetét egészen az atomi kijelentésekig visszakövetve megvizsgáljuk, milyen atomi információkat tudunk meg a premisszákból és a konklúzió tagadásából (információn kijelentést, atomi információn pedig egy atomi kijelentést vagy annak tagadását értjük);

(2) ha az eljárás során bárhol felbukkan egy formula és annak negációja, akkor az adott irányban nem folytatjuk tovább a vizsgálódást;

(3) ha minden irányban felbukkant legalább egy explicit ellentmondás, akkor a következtetést helyesnek minősíthetjük; ha nem, akkor helytelennek.

A következő szakaszokban az itt vázolt módszert fogjuk pontosítani és kiterjeszteni.

4.1 Származékok; a táblázatszerkesztés alaplépései

Vizsgáljuk meg, hogy az összetett kijelentésekben megfogalmazott komplex információt hogyan tudjuk felbontani egyszerűbb kijelentésekben megfogalmazott, elemibb információkra!

Milyen elemi információkat tudunk meg abból, hogy *János nálunk járt, és megkóstolta a feleségem almás pitéjét*? Egyrészt azt, hogy *János nálunk járt*; másrészt azt, hogy *megkóstolta a feleségem almás pitéjét*. Mit tudunk meg tehát általában egy *A* & *B* formájú kijelentésből? Egyrészt azt, hogy *A*; másrészt azt, hogy *B*. Ha egy kijelentésből egy vagy több másik kijelentést megtudunk, ezt úgy jelezzük, hogy azt, amit megtudtunk, a táblázatban a kijelentés alá írjuk.

$$\begin{array}{c} A \mathbin{\&} B \\ \hline A \\ B \end{array}$$

Az ilyen esetekben azt mondjuk, hogy kijelentésünknek konjunktív származékai vannak: *A* & *B*-ből mind *A*-t, mind *B*-t megtudjuk.

Folytassuk vizsgálódásunkat a negációval! Mit tudunk meg abból, hogy *János nem ment el a megnyitóra*? Semmi olyat, ami az eredetinél egyszerűbb szerkezetű információ volna. Általában: a ~ *A* formájú kijelentéseknek csak *A* belső szerkezete ismeretében tudjuk megadni a származékait. Ha *A* elemi kijelentés, akkor ~ *A*-nak egyáltalán nincsenek származékai. ~ *p*, ~ *q* stb. éppúgy elemi információnak minősül, mint *p*, *q* stb. Ha viszont *A* összetett, akkor a származékok *A* belső szerkezetétől függenek.

A & *B*-hez hasonlóan konjunktív származékai vannak például a ~ (*A* ⊃ *B*) formájú kijelentéseknek; a *nem igaz, hogy ha idejében odaérek, mindent el tudok intézni* kijelentésből a kondicionálisra adott sajátos értelmezésünk alapján egyrészt megtudjuk, hogy *idejében odaérek*, másrészt azt is megtudjuk, hogy *nem tudok mindent elintézni*. Az ilyen formájú kijelentések származékai tehát:

$$\begin{array}{c} \sim (A \supset B) \\ \hline A \\ \sim B \end{array}$$

De nem minden kijelentésforma származékai konjunktívak. Mit tudunk meg például abból, hogy *júliusban vagy augusztusban lesz az esküvő*? Vagy azt tudjuk meg, hogy *júliusban lesz az esküvő*, vagy azt, hogy *augusztusban lesz az esküvő*. Az ilyen esetekben alternatív származékokról beszélünk, és a származékokat nem egymás alá írjuk, hanem egymás mellé, vonallal elválasztva.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{A \lor B} \\ \hline A & B \end{array}$$

Ha alternatív származékok bukkannak fel, az egész táblázat kettéágazik; minden olyan formulát, amely a kettéágazás fölött, a fő ágban szerepel, az alternatív ágak mindegyikében figyelembe kell venni; és ha a fő ágban nem vettük még fel a származékait, akkor azokat az alternatív ágak mindegyikében fel kell venni.

Hasonlóan alternatív származékai vannak például a ~ (*A* & *B*) formájú kijelentéseknek is. Abból, hogy *nem igaz, hogy Kati szép és buta*, vagy azt az információt tudjuk meg, hogy *Kati nem szép*, vagy azt, hogy *Kati nem buta*.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\sim (A \,\&\, B)} \\ \hline \sim A & \sim B \end{array}$$

Sajátos helyzetbe kerülünk az *A* ≡ *B* formájú kijelentésekkel; az ilyeneknek a származékai ugyanis egyszerre konjunktívak és alternatívak. Abból a kijelentésből, hogy *Kati akkor és csak akkor kedves a férjéhez, ha az ajándékot vesz neki*, a bikondicionálisra adott sajátos értelmezésünk alapján vagy egyrészt azt tudjuk meg, hogy *Kati kedves a férjéhez*, másrészt azt, hogy *a férje ajándékot vesz Katinak*, vagy egyrészt azt, hogy *Kati nem kedves a férjéhez*, másrészt azt, hogy *a férje nem vesz ajándékot Katinak*.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{A \equiv B} \\ \hline A & \sim A \\ B & \sim B \end{array}$$

Külön figyelmet érdemel az az eset, amikor egy tagadott kijelentés maga is tagadott kijelentés. Abból, hogy *nem igaz, hogy nem mentem be az előadásra*, természetesen azt tudjuk meg, hogy *bementem az előadásra*. ~ ~ *A* származéka tehát *A*.

$$\begin{array}{c} \sim\sim A \\ \hline A \end{array}$$

Miután láttuk a származékok fő típusait, összefoglaljuk az összes mondatkonnektívumhoz és azok tagadásaihoz tartozó származékokat. A fentebb nem tárgyalt származékok ellenőrzését az olvasóra bízzuk.

$$\begin{array}{c} A \,\&\, B \\ \hline A \\ B \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{A \lor B} \\ \hline A & B \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{A \supset B} \\ \hline \sim A & B \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{A \equiv B} \\ \hline A & \sim A \\ B & \sim B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \sim\sim A \\ \hline A \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\sim (A \,\&\, B)} \\ \hline \sim A & \sim B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \sim (A \lor B) \\ \hline \sim A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \sim (A \supset B) \\ \hline A \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\sim (A \equiv B)} \\ \hline A & \sim A \end{array}$$

$\sim B$ $\sim B$ $\sim B \mid B$

Egy vagy több kijelentés analitikus táblázatának nevezzük azt az ábrát, amit a kiinduló kijelentésből vagy kijelentésekből a származékok módszeres kifejtésével kapunk. A származékok felírását a táblázat minden egyes ágán addig folytatjuk, amíg fel nem bukkan egy formula és a tagadása, vagy amíg fel nem vettük az adott ágon szereplő összes összetett kijelentés minden egyes származékát. A táblázatszerkesztés pontos menetét néhány példán mutatjuk meg.

4.2 Táblázatok szerkesztése és kiértékelése

4.2.1 Az analitikus táblázat szerkesztésének első példája legyen a legalapvetőbb következtetési sémánk, a *modus ponens*. Az egyszerűség kedvéért helyettesítsünk a sémába atomi kijelentéseket: $\{p \supset q , p\} \Rightarrow q$. A következtetés akkor helytelen, ha a premisszákból és a konklúzió tagadásából ellentmondó információkat tudunk meg. Táblázatunkat szerkesztését tehát a két premisszával és a konklúzió tagadásával kezdjük:

(1) $p \supset q$

(2) p

(3) $\sim q$

A három sor közül csak az elsőnek vannak származékai; a másodikban atomi kijelentés, a harmadikban atomi kijelentés tagadása áll. Az első sor származékait felvéve a táblázat két ágra bomlik:

(1)	$p \supset q$		
(2)	p		
(3)	$\sim q$		
(4)	$\sim p$	q	(1)-ből

Itt és a következőkben a jobb szélső oszlopban jelezzük, hogy melyik sor származékai szerepelnek az adott sorban. Mivel a táblázat kettéágazott, ha lennének további származékok, azokat már az egyes ágakban külön-külön kellene felvenni. Mivel azonban esetünkben már sem az eredeti formuláknak, sem maguknak a származékoknak nincsenek további származékai egyik ágon sem, mindkét ággal készen vagyunk; az ágak *befejezettek*. Hátra van még a táblázat kiértékelése. A bal ágon megtaláljuk p-t és $\sim p$-t is, a jobb oldalon pedig q-t és $\sim q$-t; ezek jelzik a számunkra, hogy a premisszákból és a konklúzió tagadásából ellentmondásra jutunk. Ha egy analitikus táblázat valamely ágán egy adott formulát és annak tagadását is megtaláljuk, akkor ezt az ágat *zártnak* mondjuk. Ha nem találunk ilyen párt, akkor az ágat *nyíltnak* mondjuk. Egy formulahalmaz akkor és csak akkor rejt magában ellentmondást – vagyis kielégíthetetlen –, ha kész (csupa befejezett ágat tartalmazó) analitikus táblázatának minden ága zárt. És megfordítva: formulahalmaz akkor és csak akkor nem rejt magában ellentmondást – vagyis kielégíthető –, ha kész analitikus táblázatának van nyílt ága. A zárt ágat csillaggal jelöljük:

(1)	$p \supset q$		
(2)	p		
(3)	$\sim q$		
(4)	$\sim p$	q	(1)-ből
	*	*	

Ha egy táblázat minden egyes ágának alján csillagot látunk, akkor megállapíthatjuk, hogy a táblázat kiinduló formulahalmaza kielégíthetetlen. Ha ez a formulahalmaz egy következtetés premisszáiból és konklúziójából áll, akkor megállapíthatjuk, hogy a következtetés helyes. Mint most, *modus ponens* sémájú következtetésünk esetében.

4.2.2 Természetesen semmi nem kötelez bennünket arra, hogy az analitikus táblázatokban konkrét formulákat és ne sémákat szerepeltessünk. Az iménti táblázat alábbi változata általánosságban is igazolja a *modus ponens* sémáját:

(1) $A \supset B$

(2) A

(3) $\sim B$

(4)	$\sim A$	B (1)-ből
	*	*

A következőkben az analitikus táblázatokat elsősorban formulákkal és nem sémákkal fogjuk használni. Ennek azonban nincsenek elvi okai: a két használat szabályai megegyeznek.

4.2.3 Ellenőrizzünk most egy – a korábbi fejezetekből szintén jól ismert – helytelen következtetést: $\{p \supset q\ ,\ q\} \Rightarrow p$. A származékok a *modus ponens* táblázatához hasonlóan két ágban helyezkednek el:

(1) $p \supset q$

(2) q

(3) $\sim p$

(4)	$\sim p$	q (1)-ből

A táblázat mindkét ága nyílt. A nyílt és befejezett ágakat körrel jelezzük:

(1) $p \supset q$

(2) q

(3) $\sim p$

(4)	$\sim p$	q (1)-ből
	o	o

Mivel a táblázatban van nyílt ág, a kiinduló formulahalmaz kielégíthető; tehát nem lehetetlen, hogy a premisszák igazak, a konklúzió viszont hamis legyen. A táblázatból még azt is kiolvashatjuk, hogy mikor fordul elő ez a helyzet: akkor, amikor *p* hamis, *q* viszont igaz.

4.2.4 Az analitikus táblázat eddig tehát megnyugtató eredményeket adott: a *modus ponenst* helyesnek, megfordítását helytelennek mutatta. Nézzünk most egy árnyalattal összetettebb példát! Ellenőrizzük analitikus táblázattal a láncszabály egy esetét: $\{p \supset q\ ,\ q \supset r\} \Rightarrow p \supset r$. A táblázat elején, mint mindig, a premisszák és a konklúzió tagadása állnak:

(1) $p \supset q$

(2) $q \supset r$

(3) $\sim (p \supset r)$

A folytatásra három lehetőségünk is van: felvehetjük bármelyik premissza vagy a konklúzió tagadása származékait. Melyiket válasszuk? Érdemes a harmadikkal kezdeni, mert ennek a származékai még nem elágazók, és így némileg egyszerűbb lesz a táblázatunk:

(1) $p \supset q$

(2) $q \supset r$

(3) $\sim (p \supset r$

)

p (3)-ból

$\sim r$

A számozást itt és a következőkben már csak addig a sorig folytatjuk, ahonnan utoljára veszünk fel származékokat. Most sort keríthetünk például az első premissza származékaira:

(1) $p \supset q$

(2) $q \supset r$

(3) $\sim (p \supset r$

)

p (3)-ból

$\sim r$

$\sim p$ | q (1)-ből

Végül a második premissza származékait természetesen mindkét ágban fel kellene vennünk; a bal ágat azonban fölösleges tovább írni, hisz az a p, $\sim p$ ellentmondó párral már lezárult:

(1) $p \supset q$

(2) $q \supset r$

(3) $\sim (p \supset r)$

p (3)-ból

$\sim r$

$\sim p$ * | q (1)-ből

| $\sim q$ | r (2)-ből

Mindkét újabb ágon ellentmondás lépett fel, így ezek az ágak is zártak.

(1) $p \supset q$

(2) $q \supset r$

(3) $\sim (p \supset r)$

p (3)-ból

$\sim r$

$\sim p$ * | q (1)-ből

| $\sim q$ * | r * (2)-ből

Minden ág zárt, tehát a premisszák ellentmondanak a konklúzió tagadásának. Az analitikus táblázatok módszere a láncszabályon is jól vizsgázott.

Természetesen más sorrendben is felvehettük volna a származékokat; például felülről lefelé haladva:

(1) $p \supset q$

(2) $q \supset r$

(3) $\sim (p \supset r)$

~ p		q		(1)-ből
~ q	r	~ q	r	(2)-ből
p	p	*	p	(3)-ból
~ r	~ r		~ r	
*	*		*	

Szigorúan véve tehát nem lehet azt mondani, hogy egy formulahalmaznak egy analitikus táblázata van; a nem triviális formulahalmazok analitikus táblázatát általában számos változatban megszerkeszthetjük. Erre a kérdésre a 4.2.6 fejezetben még visszatérünk.

4.2.4 Gyakran előfordul, hogy nem kell minden ágon egészen az atomi származékokig elmenni a táblázat megszerkesztésében ahhoz, hogy az ág lezáruljon. Egy kicsit szélsőséges példaként tekintsük ezt a következtetést: $\{(p \equiv q) \supset (r \equiv s)\ ,\ {\sim}\,(r \equiv s)\} \Rightarrow {\sim}\,(p \equiv q)$. Ennek analitikus táblázatát a fentiek alapján már igen egyszerűen megszerkeszthetjük:

(1) $(p \equiv q) \supset (r \equiv s)$

(2) ${\sim}\,(r \equiv s)$

(3) ${\sim}\,{\sim}\,(p \equiv q)$

${\sim}\,(p \equiv q)$	$r \equiv s$	(1)-ből
*	*	

Itt egyik ág sem befejezett. Ez nem meglepő, ha észrevesszük, hogy a következtetés a *modus tollens* séma egy esete. Ha nem vettük volna figyelembe, hogy az ágak már lezárultak, és végigvezettük volna őket az atomi származékokig, például meglehetősen összetett táblázatot kaptunk volna.

4.2.5 Az analitikus táblázatokat nem csak következtetések helyességének ellenőrzésére használhatjuk, hanem bármely olyan feladatra, amely véges formulahalmaz kielégíthetőségének vizsgálatát igényli. Az előző fejezetben láttuk, hogy a logika centrális fogalmai kivétel nélkül definiálhatók a kielégíthetőség fogalmára támaszkodva. Az ellentmondások például kielégíthetetlen formulák; a logikai igazságok tagadása ellentmondás. Az ekvivalens formulák közül pedig bármelyik kielégíthetetlen formulahalmazt alkot a másik tagadásával. A 4.3 alfejezetben ilyen példákat is adunk majd az analitikus táblázat módszerének alkalmazására.

4.2.6 Az analitikus táblázatok szerkesztése és kiértékelése során hallgatólagosan elfogadtuk az alábbi metatételeket (vagyis a logikai eszköztárunk tulajdonságaira vonatkozó tételeket):

(1) *Egyazon formulahalmaz analitikus táblázatainak kiértékelése kivétel nélkül ugyanazt az eredményt adja.*

(2) *Minden véges formulahalmaz tetszőleges analitikus táblázatának véges sok ága van, és ezek az ágak véges sok lépés után befejeződnek.*

(3) *Egy véges formulahalmaz akkor és csak akkor kielégíthető, ha analitikus táblázatainak van nyílt és befejezett ága.*

E tételek meghatározásaink alapján a szemlélet számára nyilvánvalóak, és szabatos bizonyításuk sem különösebben nehéz; itt és most azonban eltekintünk tőle.

4.3 Alkalmazási példák

4.3.1 Helyes-e a $\{(p \vee q) \supset (r \,\&\, s)\ ,\ (p \,\&\, q) \supset (r \supset {\sim}s))\} \Rightarrow (p \supset q) \supset ({\sim}q \supset {\sim}\,p)$ következtetés?

(1) $(p \vee q) \supset (r \,\&\, s)$

(2)	$(p \,\&\, q) \supset (r \supset \sim s))$		
(3)	$\sim ((p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p))$		
(4)	$p \supset q$		(3)-ból
(5)	$\sim (\sim q \supset \sim p)$		
(6)	$\sim q$		(4)-ből
(7)	$\sim \sim p$		
	p		(7)-ből
	$\sim p$	q	(5)-ből
	*	*	

Mindkét ág zárt; a következtetés tehát helyes.

4.3.2 Kielégíthető-e a $\{(p \supset q) \equiv (r \supset s)$, $p \,\&\, \sim s$, $r \equiv q\}$ formulahalmaz?

(1)	$(p \supset q) \equiv (r \supset s)$							
(2)	$p \,\&\, \sim s$							
(3)	$r \equiv q$							
(4)	p							(2)-ből
(5)	$\sim s$							
(6)	r				$\sim r$			(3)-ból
(7)	q				$\sim q$			
(8)	$p \supset q$			$\sim (p \supset q)$	$p \supset q$		$\sim (p \supset q)$	(1)-ből
(9)	$r \supset s$			$\sim (r \supset s)$	$r \supset s$		$\sim (r \supset s)$	
	$\sim p$	q		p	$\sim p$	q	p	(8)-ból
	*	$\sim r$	s	$\sim q$	*	*	$\sim q$	(9)-ből
		*	*	*			r	
							$\sim s$	
							*	

Minden ág zárt; a formulahalmaz tehát nem kielégíthető.

4.3.3 Logikai igazság-e a $(p \vee \sim (q \vee r)) \supset ((p \equiv q) \vee r)$ formula?

(1)	$\sim ((p \vee \sim (q \vee r)) \supset ((p \equiv q) \vee r))$				
(2)	$\sim (p \vee \sim (q \vee r))$				(1)-ből
(3)	$(p \equiv q) \vee r$				
(4)	$\sim p$				(2)-ből
(5)	$\sim \sim (q \vee r)$				
(6)	$q \vee r$				(5)-ből
(7)	q		r		(6)-ból
(8)	$p \equiv q$	r	$p \equiv q$	r	(3)-ból
	…	o	…	o	(8)-ból

Van nyílt és befejezett ág, tehát a formula tagadása nem ellentmondás; maga a formula pedig nem logikai igazság.

4.3.4 Ekvivalensek-e a $(p \supset q) \supset r$ és a $p \supset (q \supset r)$ formulák?

A két formula akkor és csak akkor ekvivalens, ha kölcsönösen következnek egymásból.

(1)	$(p \supset q) \supset r$		
(2)	$\sim (p \supset (q \supset r))$		
(3)	p		(2)-ből
(4)	$\sim (q \supset r)$		
(5)	q		(4)-ből
(6)	$\sim r$		
(7)	$\sim (p \supset q)$	r	(1)-ből
	p	*	(7)-ből
	$\sim q$		
	*		

Mindkét ág zárt; a $(p \supset q) \supset r \Rightarrow p \supset (q \supset r)$ következtetés tehát helyes.

(1)	$p \supset (q \supset r)$				
(2)	$\sim ((p \supset q) \supset r)$				
(3)	$p \supset q$				(2)-ből
(4)	$\sim r$				
(5)	$\sim p$		q		(3)-ból
(6)	$\sim p$	$q \supset r$	$\sim p$	$q \supset r$	(1)-ből
	o	…	o	…	

Van nyílt és befejezett ág; a $p \supset (q \supset r) \Rightarrow (p \supset q) \supset r$ következtetés tehát helytelen. A táblázatból kiolvasható, hogy ha p is hamis és r is, akkor q igazságértékétől függetlenül a premissza igaz, a konklúzió viszont hamis. A két formula nem ekvivalens.

4.4 Feladatok

4.4.1 Fennáll-e a $\{p \supset \sim q \,,\, q \supset \sim r\} \Rightarrow p \supset r$ következményviszony?

4.4.2 Fennáll-e a $\{p \vee \sim q \,,\, \sim p \;\&\; q\} \Rightarrow r$ következményviszony?

4.4.3 Fennáll-e a $\{p \supset (q \vee r) \,,\, \sim r \supset \sim p\} \Rightarrow p \supset q$ következményviszony?

4.4.4 Fennáll-e a $\{(p \equiv q) \supset (r \equiv s) \,,\, p \supset \sim r \,,\, q \supset s\} \Rightarrow \sim (p \equiv q)$ következményviszony?

4.4.5 Logikai igazság-e a $((q \supset r) \supset (p \supset q)) \supset (p \supset r)$ formula?

4.4.6 Ellentmondás-e a $\sim (\sim (p \vee q) \vee (\sim q \supset p))$ formula?

4.4.7 Kielégíthető-e a $\{(p \;\&\; q) \supset r \,,\, \sim q \equiv r \,,\, \sim r \supset p \,,\, q\}$ formulahalmaz?

4.4.8 Kielégíthető-e a $\{p \supset (q \supset r) \,,\, (p \vee r) \supset \sim s, \sim s \supset (p \;\&\; \sim q) \,,\, r\}$ formulahalmaz?

4.4.9 Ekvivalensek-e a $\sim (p \vee q)$ és a $\sim p \;\&\; \sim q$ formulák?

4.4.10 Ekvivalensek-e a $(p \equiv q) \equiv r$ és a $p \equiv (q \equiv r)$ formulák?

Megoldások

4.4.1m

(1) $p \supset \sim q$

(2) $q \supset \sim r$

(3) $\sim (p \supset r)$

p (3)-ból

$\sim r$

$\sim p$ * | $\sim q$ (1)-ből

$\sim q$ o | $\sim r$ o (2)-ből

Van nyílt és befejezett ág; a következtetés tehát helytelen. A táblázatból kiolvasható, hogy ha p igaz, q hamis és r is hamis, akkor a premisszák igazak, de a konklúzió hamis.

4.4.2m

(1) $p \vee \sim q$

(2) $\sim p$ & q

(3) $\sim r$

$\sim p$ (2)-ből

q

p * | $\sim q$ * (1)-ből

Mindkét ág zárt; a következtetés tehát helyes. Az ellentmondó párok között egyik ágon sem szerepel r. Ebből is látható, hogy már a premisszák ellentmondanak egymásnak.

4.4.3m

(1) $p \supset (q \vee r)$

(2) $\sim r \supset \sim p$

(3) $\sim (p \supset q)$

p (3)-ból

$\sim q$

$\sim \sim r$ | $\sim p$ * (2)-ből

$\sim p$ * | $q \vee r$ (1)-ből

q * | r *

Minden ág zárt; a következtetés tehát helyes.

4.4.4m

(1) $(p \equiv q) \supset (r \equiv s)$

(2) $p \supset \sim r$

(3) $q \supset s$

(4) $\sim \sim (p \equiv q)$

(5) $p \equiv q$ (4)-ből

(6) $\sim (p \equiv q)$ | $r \equiv s$ (1)-ből

(7) $*$ | r | $\sim r$ (6)-ból

(8) s | $\sim s$

$\sim p$ | $\sim r$ $*$ | $\sim p$ | $\sim r$ (2)-ből

$\sim q$ | s | $\sim q$ | s $*$ | $\sim q$ | s $*$ (3)-ból

p, q, $*$ | $\sim p$, $\sim q$, o | p, q, $*$ | $\sim p$, $\sim q$, o | p, q, $*$ | $\sim p$, $\sim q$, o | p, q, $*$ | $\sim p$, $\sim q$, o (5)-ből

Van nyílt ág; a következtetés tehát helytelen. A táblázatból kiolvasható: ahhoz, hogy a premisszák igazak, a konklúzió viszont hamis legyen, elég, ha mind p, mind q hamis, valamint r és s igazságértéke megegyezik.

4.4.5m

(1) $\sim (((q \supset r) \supset (p \supset q)) \supset (p \supset r))$

(2) $(q \supset r) \supset (p \supset q)$ (1)-ből

(3) $\sim (p \supset r)$

(4) p (3)-ból

(5) $\sim r$

(6) $\sim (q \supset r)$ | $p \supset q$ (2)-ből

q, $\sim r$, o | $\sim p$, $*$ | q, o (6)-ból

Két ág is nyílt és befejezett; a formula tehát nem logikai igazság.

4.4.6m

(1) $\sim (\sim (p \vee q) \vee (\sim q \supset p))$

(2) $\sim \sim (p \vee q)$ (1)-ből

(3) $\sim (\sim q \supset p)$

(4) $p \vee q$ (2)-ből

$\sim q$ (3)-ból

$\sim p$

p, $*$ | q, $*$

Mindkét ág zárt; a formula tehát ellentmondás.

4.4.7m

(1) $(p \,\&\, q) \supset r$

(2) $\sim q \equiv r$

(3) $\sim r \supset p$

(4) q

(5) $\sim q$ | $\sim\sim q$ (2)-ből

(6) r | $\sim r$

(7) * | $\sim\sim r$ | p (3)-ból

(8) * | $\sim (p \,\&\, q)$ | r (1)-ből

$\sim p$ | $\sim q$ | * (8)-ból

* | *

Minden ág zárt; a formulahalmaz tehát nem kielégíthető.

4.4.8m

(1) $p \supset (q \supset r)$

(2) $(p \vee r) \supset \sim s$

(3) $\sim s \supset (p \,\&\, \sim q)$

(4) r

(5) $\sim (p \vee r)$ | $\sim s$ (2)-ből

(6) $\sim p$ | (5)-ből

(7) $\sim r$ |

(8) * | $\sim\sim s$ | $p \,\&\, \sim q$ (3)-ból

(9) * | p (8)-ból

(10) $\sim q$

(11) $\sim p$ | $q \supset r$ (1)-ből

* | $\sim q$ | r (11)-ből

o | o

Van nyílt ág; a formulahalmaz tehát kielégíthető. A táblázatból kiolvasható, hogy ha p igaz, q hamis, r igaz, s pedig hamis, akkor mind a négy formula igaz.

4.4.9m

(1) $\sim (p \vee q)$

(2) $\sim (\sim p \,\&\, \sim q)$

$\sim p$ (1)-ből

$\sim q$

$\sim\sim p$ | $\sim\sim q$ (2)-ből

* | *

Mindkét ág zárt; tehát fennáll a $\sim (p \vee q) \Rightarrow \sim p \mathbin{\&} \sim q$ következményviszony.

(1) $\sim p \mathbin{\&} \sim q$

(2) $\sim \sim (p \vee q)$

(3) $p \vee q$ (2)-ből

$\sim p$ (1)-ből

$\sim q$

p | q (3)-ból

* | *

Mindkét ág zárt; tehát a $\sim p \mathbin{\&} \sim q \Rightarrow \sim (p \vee q)$ következményviszony is fennáll. A két formula ekvivalens.

4.4.10m

(1) $(p \equiv q) \equiv r$

(2) $\sim (p \equiv (q \equiv r))$

(3) $p \equiv q$ | $\sim (p \equiv q)$ (1)-ből

(4) r | $\sim r$

(5) p | $\sim p$ | p | $\sim p$ (3)-ból

(6) q | $\sim q$ | $\sim q$ | q

(7) p | $\sim p$ | p | $\sim p$ | p | $\sim p$ | p | $\sim p$ (2)-ből

(8) $\sim (q \equiv r)$ | $q \equiv r$ | $\sim (q \equiv r)$ | $q \equiv r$ | $\sim (q \equiv r)$ | $q \equiv r$ | $\sim (q \equiv r)$ | $q \equiv r$

q | $\sim q$ | * | * | q | $\sim q$ | q | $\sim q$ | * | * | q | $\sim q$ (8)-ból

$\sim r$ | r | r | $\sim r$ | $\sim r$ | r | r | $\sim r$

* | * | * | * | * | * | * | *

Minden ág zárt; a $(p \equiv q) \equiv r \Rightarrow p \equiv (q \equiv r)$ következtetés tehát helyes.

(1) $p \equiv (q \equiv r)$

(2) $\sim ((p \equiv q) \equiv r)$

(3) p | $\sim p$ (1)-ből

(4) $q \equiv r$ | $\sim (q \equiv r)$

(5) q | $\sim q$ | q | $\sim q$ (4)-ből

(6) r | $\sim r$ | $\sim r$ | r

(7) $p \equiv q$ | $\sim (p \equiv q)$ | $p \equiv q$ | $\sim (p \equiv q)$ | $p \equiv q$ | $\sim (p \equiv q)$ | $p \equiv q$ | $\sim (p \equiv q)$ (2)-ből

(8) $\sim r$ | r | $\sim r$ | r | $\sim r$ | r | $\sim r$ | r

* | p | $\sim p$ | p | $\sim p$ | * | p | $\sim p$ | * | * | p | $\sim p$ (7)-ből

$\sim q$ | q | q | $\sim q$ | q | $\sim q$ | $\sim q$ | q

* | * | * | * | * | * | * | *

Minden ág zárt; tehát a $p \equiv (q \equiv r) \Rightarrow (p \equiv q) \equiv r$ következtetés is helyes. Mivel mindkét irányban fennáll a következményviszony, a két formula ekvivalens.