6. Fejezet
Természetes levezetési rendszerek

Az előző fejezetekben tárgyalt kijelentéslogikai kalkulus az ún. Frege-Hilbert stílusú rendszerek közé tartozik. Az első ilyen kalkulust G. Frege alkotta meg a 19. század utolsó negyedében, és a modern logikakutatás kezdő félévszázadában kizárólag ilyen típusú rendszereket ismertek és tanulmányoztak a logikusok. A Frege-Hilbert stílusú kalkulusok közös jellemzője, hogy axiómákra és rendkívül kisszámú – olykor egyetlenegy – levezetési szabályra épülnek, valamint hogy szabályaik nem engedik meg *ideiglenes*, vagyis a levezetés során törölhető feltevések használatát. Ha egy kijelentést, mely nem logikai axióma, felhasználunk premisszaként egy Frege-Hilbert stílusú levezetés valamely lépése során, akkor az mindenképpen szerepelni fog a levezetésünk végső konklúziójához tartozó feltevések között is.

1. Kérdés. *Hány axiómából és hány levezetési szabályból áll az előző fejezetben ismertetett Frege-Hilbert stílusú kalkulus?*

Filozófiai érvekben, matematikai tételek bizonyításakor vagy akár mindennapi vitáinkban azonban gyakran találkozhatunk pusztán ideiglenes használatra bevezetett feltevésekkel. A jól ismert *indirekt bizonyítás* módszere (más néven *reductio ad absurdum*) pl. a bizonyítandó állítás negációját teszi fel ideiglenesen és ebből próbál ellentmondásra jutni, de az ilyen módon bizonyított tétel feltevései között mégsem kell szerepeltetnünk a kiinduló indirekt feltevést – azt mondhatjuk, hogy ez a feltevés a bizonyítás egy pontján *törölhető*. Hasonlóan, a *feltételes bizonyítás* módszerével úgy bizonyíthatunk be egy $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ alakú állítást a Γ premisszahalmazból kiindulva, hogy átmenetileg $\mathcal{A}$-t is felvesszük feltevéseink közé, és a bővített $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\}$ halmaz segítségével próbáljuk meg igazolni $\mathcal{B}$-t. Ha sikerrel jártunk, akkor az ideiglenesen felvett $\mathcal{A}$ kijelentést ebben az esetben is törölhetjük feltevéseink közül.

1934-ben egymástól függetlenül G. Gentzen német és S. Jaskowski lengyel logikus is olyan levezetési rendszerekről jelentetett meg cikket (?, ?), melyek szabályai a Frege-Hilbert stílusú kalkulusokénál jóval közelebb állnak a gyakorlatban használt érvek lépéseihez, és megengedik átmeneti, később törölhető feltevések bevezetését. Az általuk tárgyalt rendszerek további közös vonása, hogy levezetéseik egyáltalán nem, vagy csak kis mértékben támaszkodnak axiómákra, viszont a tipikus Frege-Hilbert stílusú kalkulusokénál lényegesen több levezetési szabállyal rendelkeznek.

Gentzen saját rendszerét a Frege-Hilbert stílusú rendszerekkel szembeállítva a *természetes levezetés* kalkulusának nevezte:

> A logikai levezetések formalizálása, különösen ahogyan azt Frege, Russell és Hilbert tették, meglehetősen távol áll a gyakorlatban a matematikai bizonyításokban alkalmazott levezetési formáktól. ⟦...⟧ Ezzel szemben én először egy olyan formális rendszert kívántam felépíteni, mely a lehető legközelebb áll a valóságos érveléshez. Az eredmény egy „*természetes levezetési kalkulus*" lett ⟦...⟧ (?, 68. o.)

Tágabb értelemben természetes levezetési rendszereknek szokták nevezni a Gentzen eredeti kalkulusához közel álló, de azzal nem tökéletesen megegyező levezetési rendszereket is. Ezek közös sajátossága, hogy – habár használhatnak axiómákat is – alapvetően levezetési szabályokra épülnek, és szabályaik némelyike megengedi bizonyos feltevések *törlését* is a levezetés feltevéseinek halmazából.

A következőkben röviden bemutatjuk a klasszikus kijelentéslogika egy olyan természetes levezetési rendszerét, mely igen közel áll Gentzen eredeti kalkulusához. Érdemes megjegyezni, hogy a korábban tárgyalt Frege-Hilbert stílusú kalkulushoz hasonlóan ez a rendszer is helyes és teljes, tehát bizonyos értelemben se többet, se kevesebbet nem nyújt a korábbi kalkulushoz képest – az alapvető különbség a premisszáktól a konklúzióhoz való eljutás *módjában* áll.