7. Fejezet
A klasszikus kijelentéslogika egy természetes levezetési rendszere

7.1 A használt kijelentéslogikai nyelv

Mielőtt a levezetési szabályok ismertetésébe fognánk, célszerű megjegyezni, hogy természetes levezetési kalkulusunkat a kijelentéslogika jól ismert nyelvének egy csipetnyit bővített változatára, $\mathcal{KL}^*$-ra fogalmazzuk meg, melynek nemlogikai konstansai a p, q, m, m_0, $\mathsf{m}_1, \ldots$ *mondatbetűk* (ezek halmazát a továbbiakban M-mel fogjuk jelölni), logikai konstansai pedig a következők:

$$\bot, \neg, \supset, \&, \vee, \equiv$$

A figyelmes olvasó nyilván észrevette, hogy eddigi kijelentéslogikai nyelvünkön csupán annyit változtattunk, hogy felvettünk egy új logikai konstanst, a $\bot$-al jelölt „mindig hamis mondatot”, melyet „hamis”-nak vagy „ellentmondásnak” fogunk hívni. Grammatikailag a $\bot$ a mondatbetűkhöz hasonlóan az atomi mondatok kategóriájába tartozik, tehát bővített nyelvünkön pl. a $\neg\bot$ és a $\mathsf{p} \supset \bot$ kifejezések jól formált mondatoknak számítanak.

A $\bot$-t *szemantikája* különbözteti meg a mondatbetűktől. Eddigi kijelentésnyelvi szemantikánkat kiegészítjük a következő ponttal:

1. Definíció. *Tetszőleges $\mathcal{I}$ interpretációra $\bot$ $\mathcal{I}$ szerinti szemantikai értéke a hamis igazságérték. Kicsit formálisabban: Minden $\mathcal{I}$ interpretációra* $|\bot|_{\mathcal{I}} = \mathsf{H}$.

Ezzel a bővítéssel szemantikánk a $\bot$-t tartalmazó 'új' mondatokhoz is meghatározott igazságértéket rendel, tetszőleges $\mathcal{I}$ interpretációra nézve. Definíciónk alapján annyiban mindenképpen joggal nevezhetjük a $\bot$-t logikai konstansnak, hogy szemantikai értéke minden interpretációban azonos.

1. Feladat. *Számítsuk ki a* $(\bot \,\&\, \neg\bot) \supset \bot$ *mondat szemantikai értéket* *abban a $\mathcal{J}$ interpretációban, mely minden mondatbetűhöz az* I *értéket rendeli! Függ-e a mondat igazságértéke az interpretációtól?*

Feltehető a kérdés, hogy egyáltalán miért van szükség ennek a furcsa konstansnak a bevezetésére? A válasz részben abban rejlik, hogy a $\perp$ segítségével rendkívül szemléletesen formalizálhatók az ellentmondások kimutatásán alapuló, a bevezetőben már említett indirekt okoskodások: pl. azt a tényt, hogy egy Γ feltevésből ellentmondás vezethető le, egyszerűen úgy fogalmazhatjuk meg, hogy $\Gamma \vdash \perp$, anélkül, hogy részleteznünk kellene az ellentmondás mibenlétét.

7.2 Levezetési szabályok

Természetes levezetési rendszerünkben, melyet Gentzenre utalva $\mathcal{G}$-vel jelölhetünk, nincsenek axiómák, és a $\perp$-on kívül minden logikai konstanshoz két levezetési szabály tartozik (esetleg több variánssal): egy *bevezetési* és egy *kiküszöbölési* szabály, melyekre a konstans nevéből és a B vagy K betűkből képzett rövidítéssel fogunk hivatkozni. Az egyes logikai konstansokhoz tartozó bevezetési szabályok olyan mondatok levezetését teszik lehetővé, melyek fő operátora a kérdéses logikai konstans. Pl. az & bevezetési szabálya segítségével

$$\frac{\mathcal{A} \quad \mathcal{B}}{\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}} \qquad (\mathrm{B}\&)$$

az $\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}$ konklúzió vezethető le tetszőleges $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ premisszákból kiindulva.

A kiküszöbölési szabályok többsége ezzel szemben olyan kijelentésekből indul ki, melyek fő operátora a kérdéses logikai konstans, és olyan mondatot vezet le, mely a kérdéses konstans elhagyásával, „kiküszöbölésével" keletkezik. Az & kiküszöbölési szabálya (melynek két variánsa van) pl. a következő:

$$\frac{\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}}{\mathcal{A}} \qquad \frac{\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}}{\mathcal{B}} \qquad (\mathrm{K}\&)$$

Már ezen a példán is megfigyelhető az az általános szabályszerűség, hogy egy logikai konstans kiküszöbölési szabálya bizonyos szempontból a bevezetési szabály *inverzének* tekinthető: ha egy levezetés során az & bevezetési szabályának alkalmazása után rögtön a kiküszöbölési szabályt is alkalmazzuk, akkor az egyik kiinduló mondatot kapjuk vissza:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots \\ \mathcal{A} & \mathcal{B}\end{array}}{\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}}\;\&\mathrm{B}}{\mathcal{A}}\;\&\mathrm{K}$$

A további bevezetési és kiküszöbölési szabályok a következők:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\mathcal{A}] \\ \vdots \\ \mathcal{B}\end{array}}{\mathcal{A} \supset \mathcal{B}}\ (\supset \mathrm{B}) \qquad\qquad \dfrac{\mathcal{A} \quad \mathcal{A} \supset \mathcal{B}}{\mathcal{B}}\ (\supset \mathrm{K})$$

$$\dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}} \qquad \dfrac{\mathcal{B}}{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}\ (\vee\mathrm{B}) \qquad\qquad \dfrac{\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \quad \begin{array}{c}[\mathcal{A}] \\ \vdots \\ \mathcal{C}\end{array} \quad \begin{array}{c}[\mathcal{B}] \\ \vdots \\ \mathcal{C}\end{array}}{\mathcal{C}}\ (\vee\mathrm{K})$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\mathcal{A}] \\ \vdots \\ \mathcal{B}\end{array} \quad \begin{array}{c}[\mathcal{B}] \\ \vdots \\ \mathcal{A}\end{array}}{\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}}\ (\equiv \mathrm{B}) \qquad\qquad \dfrac{\mathcal{A} \quad \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}}{\mathcal{B}} \qquad \dfrac{\mathcal{B} \quad \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}}{\mathcal{A}}\ (\equiv \mathrm{K})$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\mathcal{A}] \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\mathcal{A}}\ (\neg\mathrm{B}) \qquad\qquad \dfrac{\mathcal{A} \quad \neg\mathcal{A}}{\bot}\ (\neg\mathrm{K})$$

Végül a $\bot$-ra szintén két szabály vonatkozik, melyek azonban *nem* bevezetési vagy kiküszöbölési szabályok:

$$\frac{\perp}{\mathcal{A}}\ (\perp) \qquad\qquad \begin{array}{c}[\neg\mathcal{A}]\\ \vdots\\ \dfrac{\perp}{\mathcal{A}}\end{array}\ (\mathsf{RAA})$$

Levezetési szabályaink többsége olyan ismert bizonyítási szabályt fogalmaz meg formálisan, melynek helyessége evidens a szóban forgó logikai konstans jelentésének ismeretében. Pl. a kondicionális bevezetési szabálya a bevezetőben már említett feltételes bizonyítás módszerének formális változata: ha sikerült $\mathcal{A}$-ból és esetleg bizonyos más feltételekből levezetnünk $\mathcal{B}$-t, akkor $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$-re következtethetünk, úgy hogy eddigi feltevéseink közül $\mathcal{A}$ *törölhető* – a feltevések törölhetőségét a kérdéses feltevés körüli szögletes zárójel jelzi a szabályokban. A kondicionális kiküszöbölés szabálya szintén régi ismerősünk, hiszen nem más, mint a *modus ponens*, más néven leválasztási szabály.

A negációra és a $\perp$-ra vonatkozó szabályok jól mutatják, hogy ez a két logikai konstans szoros kapcsolatban áll egymással (egy későbbi fejezetben látni fogjuk, hogy kölcsönösen definiálhatóak is egymás segítségével). A negáció bevezetési szabálya azt mondja ki, hogy ha egy állításból és esetleg bizonyos más feltevésekből ellentmondást vezettünk le, akkor a kérdéses állítás negációjára következtethetünk, miközben magát az állítást törölhetjük feltevéseink közül. Fontos megjegyezni, hogy ez a szabály *nem* az indirekt bizonyítás, vagy *reductio ad absurdum* módszerét fogalmazza meg, mivel azt a $\perp$-ra vonatkozó (RAA) formalizálja: A két hasonló szabály közti különbség abban áll, hogy míg ($\neg$B) a kiinduló állítás *negációjára* következtet abból, hogy ellentmondást sikerült belőle levezetni, addig az indirekt bizonyításban éppen fordítva haladunk, és a bizonyítandó állítás negációjából vezetünk le ellentmondást, hogy azután magára a negáció nélküli állításra következtethessünk. (RAA) tehát tulajdonképpen ($\neg$K)-hoz hasonlóan a negációt eltávolító, kiküszöbölő szabály, szemben ($\neg$B)-vel, mely nevéhez hűen bevezeti azt. A negáció és a $\perp$ további szabályai szintén jól ismert következtetési szabályokat fogalmaznak meg: ($\perp$) szerint egy ellentmondásból bármire következtethetünk, míg ($\neg$K) azt a tényt rögzíti, hogy az $\mathcal{A}$, $\neg\mathcal{A}$ feltevések ellentmondanak egymásnak.