

8. Fejezet

Természetes levezetési példák, feladatok

A szabályok áttekintése után lássunk néhány példát arra, miképp építhetünk fel levezetéseket a fent ismertetett lépések segítségével. Rendszerünk levezetései nem csak a levezetési szabályokra nézve, hanem formai szempontból is erősen különböznek majd a korábban tárgyalt Frege-Hilbert stílusú kalkulus levezetéseitől: míg az utóbbiak *egydimenziósak*, vagyis a levezetés formulái lineáris sorozatban követik egymást, addig természetes levezetéseink túlnyomó többsége *kétdimenziós* lesz, mivel a levezetés formulái *fa* alakzatba rendezve helyezkednek el.

Első példánk a $(\neg p \vee q) \supset (p \supset q)$ logikai igazság levezetése:

$$\frac{\frac{\frac{[p]^1 \quad [\neg p]^2}{\perp} \neg K \quad \frac{\frac{[q]^2}{p \supset q} \supset B}{p \supset q} \vee K_2}{\neg p \vee q} \supset B_1}{p \supset q} \supset B_3}{(\neg p \vee q) \supset (p \supset q)} \supset B_3 \quad (1)$$

A vízszintes vonalak a tőlük jobbra lévő szabályhivatkozással azt jelzik, hogy a közvetlenül alattuk lévő formula a felettük lévőkből a megfelelő szabály segítségével került levezetésre. Ha egy szabály alkalmazása során töröltünk bizonyos feltevéseket, akkor a könnyebb olvashatóság kedvéért a feltüntetett szabálynevet egyedi indexszel látjuk el, melyet a törölt feltevések jobb felső sarkánál is jelzünk – ezek az indexek azonban nem részei a tulajdonképpeni levezetéseknek.

A levezetés legszó, a „fa gyökerénél” elhelyezkedő formulája a levezetés *konklúziója*, míg a levezetési fa legtetején, az „ágak csúcsain” elhelyezkedő, *nem törölt* formulák a levezetés premisszái vagy feltevései. Példánkban az összes feltevést töröltük a levezetés során, tehát a konklúziót végeredményben feltevések nélkül, az üres premisszahalmazból sikerült levezetnünk. A \mathcal{G} rendszerbeli levezethetőséget $\vdash_{\mathcal{G}}$ -vel jelölve azt mondhatjuk, hogy levezetésünk igazolja, hogy $\emptyset \vdash_{\mathcal{G}} (\neg p \vee q) \supset (p \supset q)$, vagyis a szokásos rövidítést

alkalmazva beláttuk, hogy

$$\vdash_{\mathcal{G}} (\neg p \vee q) \supset (p \supset q) \quad (2)$$

Példánk egy levezetési lépése kitüntetett figyelmet érdemel. A konklúzió eléréséhez le kellett vezetnünk q -ból $p \supset q$ -t, és ezt egy *törlés nélküli* kondicionális bevezetéssel tettük meg:

$$\frac{q}{p \supset q} \supset B \quad (3)$$

Ez a rövid levezetés két fontos dologra is rávilágít. Az egyik az, hogy egy formula önmagában is levezetésnek számít, méghozzá olyannak, melynek saját maga a konklúziója és egyetlen premisszája is. Ezért alkalmazhatjuk ilyen módon a $(\supset B)$ szabályt, amely egy levezetésből indul ki. A másik levonható tanulság az, hogy a feltevések törlését *megengedő* levezetési szabályok akkor is alkalmazhatóak, ha egyáltalán nem törölünk premisszát, sőt az is előfordulhat, hogy egy feltevés törölhető előfordulásai közül egyeseket törölünk, másokat pedig megtartunk. Például a következő levezetés meglehetősen értelmetlen, de szabályos, annak ellenére, hogy $(\supset B)$ alkalmazásakor csak p egyik előfordulását töröltük a kettő közül:

$$\frac{\frac{[p]^1 \quad p}{p \& p} \&B}{\frac{p}{p \supset p} \&K} \supset B_1 \quad (4)$$