9. fejezet

Intuicionista logika I. Grammatika és szintaxis

A klasszikus logika alapvető feltevésével, a kétértékűség elvével szemben komoly érvek hozhatók fel. A kétértékűség elvét – és vele együtt a kizárt harmadik törvényét is – elvető, konstruktív logikák közül az alkalmazások szempontjából a legnevezetesebb az intuicionista logika. Ebben a fejezetben a kétértékűség elvével szemben felhozható érvek áttekintése után az intuicionista logika szintaktikai és szemantikai rendszerét mutatjuk be. Megadjuk az intuicionista logika természetes levezetésen alapuló, illetve Hilbert–Frege stílusú kalkulusát (az előbbi Gentzen, az utóbbi Heyting hírnevét öregbíti).

9.1. A kétértékűség elve és a kizárt harmadik törvénye

A **kétértékűség elve** az igazság és a hamisság értelmezésétől függ. Ha az elv mondatok egy bizonyos osztályra érvényes, az a következőt jelenti: *a szóban forgó osztály tetszőleges* m *eleme egyértelműen vagy igaz, vagy hamis.*

A *kétértékűség elve* meglehetősen kézenfekvőnek tűnik ugyan, mégis jó néhány eset van, amikor érvényessége megkérdőjelezhető. Lássunk néhányat:

„Paradox mondatok” Az „ez a mondat hamis” (vagy a „hazudok”) mondat például sem igaz, sem hamis nem tud lenni.

9.1.1. Paradox-e a „hazug paradoxonjának” klasszikus változata?

> „A kiknek be kell dugni a szájokat; a kik egész házakat feldúlnak, tanítván rút nyereség okáért, a miket nem kellene. Azt mondta valaki közülök, az ő saját prófétájok: A krétaiak mindig hazugok, gonosz vadak, rest hasak. E bizonyság igaz: annakokáért fedd őket kímélés nélkül, hogy a hitben épek legyenek.” [Tit. 1,12–13.]

A távoli múltra vagy jövőre vonatkozó mondatok között ugyancsak lehetnek olyanok, amelyeket határozottan sem igaznak, sem hamisnak nem tekinthetünk.

Az elmosódott határú kifejezéseket tartalmazó mondatok esetében gyakran a legjobb tudásunk is kevés ahhoz, hogy igazságot tegyünk. Ha – például – a 'narancsszínű' valódi határesetével van dolgunk, akkor hiába beszéljük jól a nyelvet, az „ez narancsszínű" mondatot némelyikünk igaznak, mások pedig hamisnak fogják tekinteni. (Kaliforniában pirosabb a narancs, mint Magyarországon...)

A feltételes módú „ha...,akkor..." mondatok között is vannak, amelyeknél nemigen tudnánk egyértelműen nyilatkozni arról, hogy igazak-e vagy sem. Igaz vagy hamis például a „ha a kenguruknak nem lenne farkuk, akkor hanyatt esnének" mondat?

A modális operátorok szintén feladhatják a leckét: míg a „Gellért-hegyen nem él egyszarvú" mondat igazságértékét meglehetős bizonyossággal eldönthetjük, a „Gellérthegyen nem is élhetett soha egyszarvú" mondat esetében az sem nyilvánvaló, hogy hol kellene kezdenünk a vizsgálódást.

A végtelen összességekre vonatkozó mondatok között több olyan is lehet, amely – számunkra legalábbis – rejtély: ahhoz, hogy az ilyen mondatok igazságukról nyilatkozhassunk, legalábbis Chuck Norris-i képességekkel kellene rendelkeznünk (el kellene tudnunk számolni „végtelenig").

A kizárt harmadik törvénye nem csupán az igazság, de két logikai konnektívum, az alternáció és a negáció értelmezésétől is függ. Egy logikai rendszerben érvényes a kizárt harmadik törvénye, ha az

$$\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$$

mondat tetszőleges $\mathcal{A}$ mondat esetén logikai igazság.

Ne kerülje el a figyelmünket, hogy mindkét elv univerzális, így cáfolatukhoz elegendő egyetlen olyan mondatot mutatni, amely – az adott igazságértelmezés mellett – nem igaz és nem is hamis, illetve egyetlen olyan $\mathfrak{m}$ mondatot, amellyel $\mathfrak{m} \vee \neg\mathfrak{m}$ nem igaz.

A klasszikus propozicionális logika szemanatikája tiszteletben tartja a kétértékűség elvét, elvégre az értékelések per definitionem olyanok, hogy minden mondat vagy igaz, vagy hamis. Hasonlóan érvényes a kizárt harmadik törvénye is: az $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$ séma minden behelyettesítése tautológia.

Tekintsük újra a jövő idejű mondatokat. Rájuk vonatkozóan elfogadhatjuk példáulazt az igazságfogalmat, amely szerint egy jövő idejű $\mathfrak{m}$ mondat (egyértelműen) igaz, ha a világ olyan lesz, amilyennek leírja, bárhogy alakuljanak is a dolgok, másszóval: $\mathfrak{m}$ minden, a jelennel kompatibilis lehetséges jövőben bekövetkezik. A hamisság értelmezése ennek megfelelően: a jövő idejű $\mathfrak{m}$ mondat hamis, ha egyetlen, a jelennel összeegyeztethető lehetséges jövőben sem következik be. [Vegyük észre, hogy az 'igaz' kétszer is szerepel: egyszer az egyes lehetséges jövőkben való „szimpla" bekövetkezést, másodszor pedig a jelenbeli, egyértelmű igazságot jelöli.] Ebben az esetben a „holnap lesz tengeri csata" mondatot sem igaznak, sem hamisnak nem tekinthetjük: elképzelhető, hogy a sors (és a politika) úgy hozza, hogy lesz, de az is, hogy nem lesz. Ha tehát az igazságot és a hamisságot a fentiek szerint értelmezzük, akkor a kétértékűség elve nem lesz érvényes – a kizárt harmadik azonban igen, elvégre (például) az, hogy „van vagy nincs tengeri csata", minden „lehetséges holnapban" igaz.

9.1.2. Értelmezzük Arisztotelész klasszikus érvelését.

> Tehát ami van, az szükségszerűen van akkor, amikor van, és ami nincs, az szükségszerűen nincs, amikor nincs. Viszont nem szükségszerűen van minden, ami van, és nem szükségszerűen nincs minden, ami nincs. Mert nem ugyanaz, hogy minden ami van, ami szükségszerűen van, amikor van, meg hogy egyszerűen szükségszerűen van. Ugyanígy van ez annál is, ami nincs. És az ellentmondásnál is ugyanez a helyzet. Mert minden szükségszerűen van-vagy-nincs, és lesz-vagy-nem-lesz. Nem kell azonban azt mondani, hogy *határozottan* az egyik szükségszerű. Ezt úgy értem, hogy pl. holnap szükségszerűen lesz-vagy-nem-lesz tengeri csata; hogy azonban lesz holnap tengeri csata, az már nem szükségszerű, sem az, hogy nem lesz; *az* szükségszerű, hogy lesz-vagy-nem-lesz. [HERMÉNEUTIKA, 19a 23–32:]

Van tehát olyan igazságfogalom, amely mellett – mondatok egy adott osztályára vonatkozóan – a kétértékűség elve nem, a kizárt harmadik törvénye viszont érvényes.

9.1.3. Érveljünk amellett, hogy fordítva ez nem fordulhat elő: ha a kétértékűség elve érvényes, akkor a kizárt harmadik törvény is az.

Előfordulhat-e, hogy sem a kétértékűség elve, sem a kizárt harmadik törvénye nem érvényes? Igen, előfordulhat: ez a helyzet az *intuicionista logikában.*

9.2. A „konstruktív-verifikacionista" igazság logikája

A Jan Luitzen Egbertus Brouwer holland matematikus-filozófus nevéhez kapcsolható, a múlt század húszas éveiben színre lépett intuicionizmus fő tézise a kizárt harmadik elve általános érvényének kétségbevonása. Brouwer is elismeri, hogy a kizárt harmadik a véges összességekre vonatkozó állítások esetében érvényes, kétségbe vonja azonban, hogy érvényessége állítások tetszőleges összességére kiterjeszthető.

A kizárt harmadik törvénye az erős igazságértelmezés miatt válik érvénytelenné. Az intuicionisták ugyanis nem fogadják el a klasszikus, „platonista" igazságfogalmat, szerintük egy mondat igaz, ha igazsága számunkra is – nem csupán egy mindent tudó magasabbrendű elme számára – nyilvánvaló. A matematikában ilyen bizonyossággal a bizonyítások szolgálnak: egy mondat „számunkra" is igaz, ha bebizonyítottuk, azaz kétségbevonhatatlanul igaz alapfeltevésekből véges számú, kétségbevonhatatlanul érvényes lépésben levezettük, és hamis, ha beláttuk, hogy nem fér össze alapfeltevéseinkkel, azaz feltevése ellentmondáshoz vezet. Világos, hogy ha $\mathfrak{m}$ nem bizonyított és nem is cáfolt, akkor – az „igaz" és a „hamis" iménti értelmezése szerint – nem igaz, és nem is hamis, és ekkor nem igaz az $\mathfrak{m} \vee \neg\mathfrak{m}$ mondat sem.

A logikai konnektívumok „jelentése" ezzel összhangban úgy adható meg, hogy megmondjuk: mikor igazak (tehát bizonyíthatók) azok a mondatok, amelyekben szerepelnek. Kolmogorov „kváziszemantikája" szerint:

- $\mathfrak{m} \,\&\, \mathfrak{n}$ bizonyítását megadtuk, ha megadtuk $\mathfrak{m}$ és $\mathfrak{n}$ egy-egy bizonyítását;
- $\mathfrak{m} \vee \mathfrak{n}$ bizonyítását megadtuk, ha megadtuk $\mathfrak{m}$ és $\mathfrak{n}$ közül legalább az egyiknek a bizonyítását;

- $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{n}$ bizonyítása olyan eljárás, amelynek alapján $\mathfrak{m}$ tetszőleges bizonyításából megkaphatjuk $\mathfrak{n}$ bizonyítását.

Figyeljünk fel arra, hogy az $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{n}$ kondicionális igazságához több kell az $\neg\mathfrak{m} \vee \mathfrak{n}$ alternáció igazságánál. A kondicionálissal valójában egy univerzális állítást fejezünk ki: *minden* olyan szituációban, amelyben $\mathfrak{m}$ igaz, $\mathfrak{n}$ is igaz kell, hogy legyen.

Az intuicionista logika érvényességi köre mindazonáltal nem korlátozódik a matematikára: ha az igazságot – állítások egy adott osztályára vonatkozóan – valamilyen értelemben a verifikációhoz kötjük, és nem fogadjuk el, hogy vannak „tőlünk független" („verifikációtranszcendens") igazságok, akkor az intuicionista logika a vizsgálódás természetes keretéül szolgálhat.

9.3. Grammatika és szintaxis

Tárgyunk még mindig a propozicionális logika, alapmondataink tehát „szerkezet nélküli", tovább nem elemezhető objektumok, az ilyen mondatokat jelölik a mondatbetűk. Egy propozicionális logikai nyelv megadása ennélfogva a *mondatbetűk* megadását jelenti; a mondatbetűk halmazát ebben a fejezetben $\mathbb{M}$ jelöli. A propozicionális logika nyelvének logikai konstansai (a zárójelek mellett) a következők:

$$\bot, \neg, \supset, \vee, \&.$$

A $\bot$ a „mindig hamis" mondat, amely – ha úgy tetszik – „nulla-argumentumú" konnektívum. A $\bot$ természetesen definiálható is: tetszőleges $\mathfrak{m}$ mondatbetű esetén $\mathfrak{m}\ \&\neg\mathfrak{m}$ megteszi $\bot$-nak, $\neg\bot$ pedig $\top$-nak. Hogy a definíció egyértelmű legyen, megegyezhetünk például abban, hogy $\bot$-ot az $\mathbb{M}$ halmaz első elemével definiáljuk. Így persze a „magábanvaló hamis" nyelvfüggő, minden nyelvnek meglesz a maga hamissága. Ez persze csak látszólagos: könnyen igazolható, hogy az így deifiniált mondatra minden nyelvben ugyanazok a szabályok érvényesek. A $\bot$ logikai konstansként való értelmezés mellett ugyanakkor erős érv, hogy a negáció $\bot$ segítségével definiálható:

$$\neg\mathcal{A} \quad \Leftrightarrow_{\text{def}} \quad \mathcal{A} \supset \bot$$

Ezt a definíciót a klasszikus logikában is magunkévá tehetjük: egy állítás hamis, ha feltevéséből ellentmondásra jutunk.

A mondatokat a mondatbetűkből kapjuk a szokásos szabályok szerint: $\bot$ és a mondatbetűk mind mondatok, ha $\mathfrak{m}$ mondat, akkor mondat $\neg\mathfrak{m}$ is, ha $\mathfrak{m}$ és $\mathfrak{n}$ mondatok, akkor $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} \vee \mathfrak{n}$ és $\mathfrak{m}\ \&\ \mathfrak{n}$ is az. A mondatok jelölésére általában az $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{m}''$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ stb. szimbólumokat használjuk, a mondathalmazokat pedig – ahogy eddig – görög nagybetűkkel (Γ, Δ sb.) jelöljük.

9.3.1. A nagy alfát és a nagy bétát erre a célra nemigen használjuk. Miért nem?

Nem változik a **szintaktikai következményreláció**, azaz a levezethetőség jelölése sem: $\Gamma \vdash \mathfrak{m}$ jelöli azt, hogy az $\mathfrak{m}$ mondat a Γ mondathalmazból levezethető. A reláció értelmezéséhez – szokás szerint – a következtetési szabályokat és (amennyiben vannak ilyenek) az axiómasémákat kell rögzítenünk.

Akár természetes levezetésként, akár Hilbert–Frege-stílusú kalkulussal értelmezzük a $\Gamma \vdash m$ relációt, a klasszikus propozicionális logikától való eltérés jól tetten érhető lesz.

9.4. Természetes levezetés, Hilbert–Frege-kalkulus

Az intuicionista logikában a logikai konnektívumokra vonatkozó szabályok „a lehető legközelebb" vannak klasszikus megfelelőikhez.

Ebben a pontban az intuicionista logika levezethetőség-relációját értelmezzük; megadunk egy természetes levezetésen és egy Frege–Hilbert-féle kalkuluson alapuló rendszert is. A kalkulus sémáit a természetes levezetés következtetési szabályaival párhuzamosan írjuk fel, méghozzá úgy, hogy minden egyes konnektívum esetében rögzítjük azokat a sémákat, amelyek biztosítják az adott konnektívumra vonatkozó következtetési szabályok érvényességét. Később látni foguk, hogy az intuicionista logikában a konnektívumok függetlenek, azaz nem lehet – például – a negáció és a kondicionális segítségével az összes többi konnektívumot definiálni, ez indokolja, hogy a kalkulusban minden konnektívum saját axiómasémákat kap. A kondicionális, az alternáció és a konjunkció természetes levezetésbeli szabályai az intuicionista logikában is érvényesek maradnak, a tárgyalást ennélfogva ezekkel kezdjük.

A **kondicionálisra** vonatkozó két szabályunk a modus ponens és a dedukciótétel: ha Γ mondatok egy halmaza, $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ pedig mondatok, akkor $\Gamma \vdash \mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ és $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ esetén fennáll $\Gamma \vdash \mathcal{B}$ is, továbbá ha $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash \mathcal{B}$, akkor $\Gamma \vdash \mathcal{A} \supset \mathcal{B}$.

A modus ponens az intuicionista logikában is (korlátlan érvényességű) következtetési szabály; a kalkulusban ez az egyetlen ilyen szabály. A deukciótétel érvényességéhez a következő két sémára van szükségünk:

$$\mathcal{A} \supset (\mathcal{B} \supset \mathcal{A}) \tag{1}$$

és

$$(\mathcal{A} \supset (\mathcal{B} \supset \mathcal{C})) \supset ((\mathcal{A} \supset \mathcal{C}) \supset (\mathcal{B} \supset \mathcal{C})). \tag{2}$$

Belátjuk, hogy ennyi valóban elég: *ha egy kalkulusban a modus ponens az egyetlen következtetési szabály, akkor* (1) *és* (2) *garantálja a dedukciótételt.*

Tegyük fel ugyanis, hogy – adott m és n mondatok esetén – $\Gamma \cup \{m\} \vdash n$. Ekkor létezik mondatoknak egy olyan

$$\begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_z \end{array}$$

véges sorzata, amelyben $k_z = n$, és amelynek minden tagja vagy

– axióma (egy axiómaséma behelyettesítése), vagy

– $\Gamma \cup \{m\}$ eleme, vagy

– a sorozat két előző tagjából modus ponensszel következik.

Tekintsük most az iménti levezetésből kapott

$$\begin{gathered} m \supset k_1 \\ m \supset k_2 \\ \vdots \\ m \supset n \end{gathered}$$

mondatsorozatot. Megmutatjuk, hogy ez a sorozat – további tagok hozzávételével – levezetéssé alakítható, méghozzá az utolsó, $m \supset n$ mondat Γ-ból való levezetésévé.

Három esetet különböztetünk meg. (a) Ha az eredeti levezetésben szereplő k_i axióma, akkor $m \supset k_i$ is logikai igazság: modus ponensszel megkapható k_i és $k_i \supset (m \supset k_i)$ alapján (az utóbbi az (1) séma behelyettesítése). (b) Ha k_i a $\Gamma \cup \{m\}$ mondathalmaz eleme, akkor két eset lehetséges: (i) $k_1 \in \Gamma$ vagy (ii) $k_i = m$. (i) Ha $k_i \in \Gamma$, akkor $\Gamma \vdash m \supset k_i$: itt megint elegendő az (1) sémára hivatkozni. (ii) Ha $k_i = m$, akkor $m \supset k_i = m \supset m$, az utóbbi azonban – mint az közismert – (1) és (2) alapján levezethető.

9.4.1. Hogyan?

(c) Az eredeti levezetésbeli k_i mondatot modus ponesszel a k_h és $k_h \supset k_i$ mondatokból kaptuk. Ebben az esetben a második mondatsorozatban – az $m \supset k_i$ előtt szerepelniük kell az $m \supset k_h$ és a $m \supset (k_h \supset k_i)$ mondatoknak. Ekkor azonban a (2) behelyettesítéseként kapott

$$(m \supset (k_h \supset k_i)) \supset ((m \supset k_h) \supset (m \supset k_i))$$

axiómából a modus ponens kétszeri alkalmazása éppen az $m \supset k_i$ mondatot adja.

Az **alternációra** vonatkozó természetes levezetésbeli szabályok: (i) ha $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, akkor – tetszőleges $\mathcal{B}$-vel – $\Gamma \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ és $\Gamma \vdash \mathcal{B} \vee \mathcal{A}$, és (ii) ha $\Gamma \vdash \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash \mathcal{C}$ és $\Gamma \cup \{\mathcal{B}\} \vdash \mathcal{C}$, akkor $\Gamma \vdash \mathcal{C}$.

Ahhoz, hogy ezek – levezetett törvényekként – a kalkuluson alapuló levezetés szerint is érvényesek legyenek, elegendő, ha rögzítjük az alábbi axiómasémákat:

$$\mathcal{A} \supset (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}), \tag{3}$$

$$\mathcal{A} \supset (\mathcal{B} \vee \mathcal{A}), \tag{4}$$

és

$$(\mathcal{A} \supset \mathcal{C}) \supset ((\mathcal{B} \supset \mathcal{C}) \supset ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \supset \mathcal{C})). \tag{5}$$

9.4.2. Vezessük le a $\vee$-szabályokat a (3)–(5) sémák és a dedukciótétel alapján.

A **konjunkció** természetes szabályai: (i) ha $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ és $\Gamma \vdash \mathcal{B}$, akkor $\Gamma \vdash \mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}$, valamint (ii) $\Gamma \cup \{\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}\} \vdash \mathcal{A}$ és $\Gamma \cup \{\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}\} \vdash \mathcal{B}$.

Ahhoz, hogy ezek – ugyancsak mint levezetett sémák – a kalkulussal értelmezett $\vdash$ reláció szerint érvényben maradjanak, elegendő a következő három axiómaséma:

$$\mathcal{A} \supset (\mathcal{B} \supset (\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B})), \tag{6}$$

$$(\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}) \supset \mathcal{A} \tag{7}$$

és

$$(\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B}) \supset \mathcal{B}. \tag{8}$$

9.4.3. Vezessük le az &-szabályokat a (6)–(8) sémák és a dedukciótétel alapján.

A **negáció** – mint már említettük – értelmezhető $\perp$ alapján is: $\neg A$ ekkor per definitionem az $A \supset \perp$ mondat. A kondicionálisra vonatkozó szabályaink szerint így ha $\Gamma \vdash A$ és $\Gamma \vdash \neg\mathcal{A}$, akkor $\Gamma \vdash \perp$, illetve ha $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash \perp$, akkor $\Gamma \vdash \neg\mathcal{A}$. Ekkor elegendő, ha a falsumra vonatkozóan egy egyszerű sémát rögzítünk:

$$\perp \supset \mathcal{A}, \tag{F}$$

a falsumból tehát bármi következik. A séma természetes levezetésbeli megfelelője a

$$\frac{\perp}{\mathcal{A}}$$

szabály. Ha a falsumot és a negációt egyaránt használjuk (maga Gentzen is így tesz), akkor felvehetjük az

$$\frac{\mathcal{A}, \ \neg\mathcal{A}}{\perp}$$

szabályt is, amelynek séma-megfelelője:

$$(\mathcal{A} \,\&\, \neg\mathcal{A}) \supset \perp.$$

Ha a falsum nem logikai konstans, akkor (F) helyett a következő két séma biztosítja, hogy a negáció megfelelően viselkedjen:

$$(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \supset ((\mathcal{A} \supset \neg\mathcal{B}) \supset \neg\mathcal{A}) \tag{9}$$

és

$$\neg\mathcal{A} \supset (\mathcal{A} \supset \mathcal{B}). \tag{10}$$

Az (1)-(10) *vagy az* (1)–(8), (F) *sémák az intuicionista logika Frege–Hilbert-stílusú kalkulusának sémái. Ha ezekhez a sémákhoz hozzávesszük a kizárt harmadik érvényességét biztosító*

$$\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A},$$

sémát, vagy a kettős tagadás

$$\neg\neg\mathcal{A} \supset \mathcal{A}$$

sémáját, akkor a klasszikus propozicionális logikát kapjuk.

Az intuicionista logikát tehát valóban kizárólag az intuicionisták által leginkább kifogásolt törvény, a kizárt harmadik érvénytelensége különbözteti meg a klasszikus logikától. [Később látni fogjuk, hogy léteznek „közbenső" logikák is: olyanok, amelyek az intuicionista logikánál „többet tudnak", de a klasszikus logikánál kevesebbet.]

Adósak vagyunk még a **bikondicionális** értelmezésével. A meglepetés ezúttal elmarad:

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow_{\text{def}} \quad (\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \,\&\, (\mathcal{B} \supset \mathcal{A})$$

Az alábbi sémák az intuicionista logikában is törvényerejűek:

$$\mathcal{A} \supset \neg\neg\mathcal{A}$$
$$\neg\mathcal{A} \equiv \neg\neg\neg\mathcal{A}$$
$$\neg(\mathcal{A} \,\&\, \neg\mathcal{A})$$
$$\neg\neg(\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A})$$
$$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv (\neg\mathcal{A} \,\&\, \neg\mathcal{B})$$
$$(\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \supset \neg(\mathcal{A} \,\&\, \neg\mathcal{B})$$
$$(\mathcal{A} \supset \neg\mathcal{B}) \equiv \neg(\mathcal{A} \,\&\, \mathcal{B})$$
$$(\neg\neg\mathcal{A} \supset \mathcal{B}) \supset (\neg\mathcal{B} \supset \neg\mathcal{A})$$

9.4.4. Adjuk meg legalább három természetes – vagy a tárgyalt kalkulus szerinti – levezetését.

Ha nem sikerül, ne kedvetlendjünk el, hamarosan valamivel egyszerűbben, szemantikailag is igazolhatjuk, hogy a sémák az intuicionista logikában érvényesek – ehhez „csupán” egy formális szemantikára (illetve szemantikai következményrelációra) lesz szükségünk, továbbá be kell bizonyítanunk, hogy erre nézve a kalkulusunk teljes. Ez lesz a következő fejezet témája.